

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В ПЛАЗМЕ

УДК 533.951

РАЗДЕЛЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ ИЗОТОПОВ
ПРИ ПОМОЩИ ИЦР-НАГРЕВА НА ВТОРОЙ ГАРМОНИКЕ

© 1999 г. И. А. Котельников, С. Г. Кузьмин*

Институт ядерной физики СО РАН им. Г.И. Будкера

*Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 29.10.98 г.

Окончательный вариант получен 29.01.99 г.

Излагается теория разделения изотопов тяжелых элементов методом изотопически селективного нагрева струи плазмы, состоящей из ионов разделяемого элемента. Представлены результаты расчетов индуктивного нагрева на второй гармонике в поле соленоидальной антенны, возбуждающей ВЧ-поле с азимутальным числом $m = 0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Селективный ионно-циклотронный нагрев как метод разделения изотопов известен со времен Манхэттенского проекта. Для элементов трансурановой группы он был признан неконкурентоспособным в сравнении с методом газодиффузионного разделения из-за сравнительной дороговизны и отсутствия источников плазмы с необходимыми параметрами. Однако некоторые химические элементы группы лантанидов не удается эффективно перевести в газовую фазу. Между тем потребность в них потенциально очень велика. Например, изотопы гадолиния $^{155}\text{Gd}^{64}$ и $^{157}\text{Gd}^{64}$ весьма эффективны в качестве выгорающей добавки в перспективных конструкциях реакторов деления, поскольку имеют сечение захвата медленных нейтронов в десятки раз больше, чем у кадмия $^{113}\text{Cd}^{48}$, используемого в действующих реакторах.

Идея рассматриваемого нами метода состоит в селективном ИЦР-нагреве струи многоизотопной плазмы, вышедшей из мощного разрядного источника плазмы, с последующим разделением горячих и холодных ионов (рис. 1). Источник струи плазмы из тяжелых металлов с высокой плотностью тока разработан в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера [1]. Выделение нагретых ионов предполагается производить в криволинейном магнитном поле за счет выдрейфовывания на стенки вакуумной камеры [2]. В настоящей работе мы продолжим анализ нагрева струи в высокочастотном (ВЧ) поле соленоидальной антенны, начатый в [3] (см. также [4]), где рассматривался ИЦР-нагрев на первой гармонике циклотронной частоты выделяемого изотопа, в качестве которого был выбран $^{157}\text{Gd}^{64}$. Там было подчеркнуто, что для достижения необходимой селективности нагрев струи должен осуществляться на достаточно длинном участке строго однородного магнитного

поля. Если через k_* обозначить характерное значение продольного волнового числа k_{\parallel} в спектре ВЧ-поля (оно же – ширина спектра), то для того чтобы селективно нагреть только изотоп с атомным числом A , отделив его от сателлитных изотопов $A \pm 1$, необходимо обеспечить разность циклотронных частот $\Delta\Omega \approx \Omega/A$, большую, чем доплеровское уширение линии поглощения k_*v_a , где v_a – тепловая скорость выделяемого изотопа, а Ω – его циклотронная частота:

$$k_* v_a \leq \Delta\Omega. \quad (1)$$

Для выполнения условия селективности нагрева (1) следует использовать возможно более длинноволновые колебания, так, чтобы на полной длине зоны нагрева l укладывалось не более одной длины волны, т.е.

$$k_* = 2\pi/l.$$

При заданной длине зоны нагрева и заданной величине магнитного поля наилучшую селективность обеспечивает применение простейшей антенны, выполненной в виде обычного соленоида.

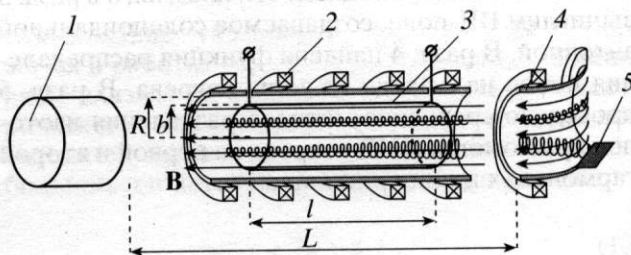


Рис. 1. Схема сепаратора изотопов: 1 – источник плазмы; 2 – катушки, создающие постоянное магнитное поле; 3 – катушка, создающая высокочастотное поле; 4 – криволинейный элемент для выделения горячих ионов; 5 – приемник целевого изотопа; l – длина антенны, L – длина зоны нагрева.

В этом случае величина доплеровского уширения линии поглощения совпадает с пролетным уширением линии поглощения $2\pi/\tau$, где $\tau = l/v_a$ – время пролета струи через зону нагрева (если скорость струи порядка тепловой скорости ионов).

Применение других, более сложных антенн сопровождается уменьшением длины волны и ухудшает селективность нагрева. Однако использование длинноволновых колебаний для нагрева плазмы также встречает серьезные трудности. Так, при нагреве на первой гармонике циркулярная поляризация ВЧ-поля, вращающаяся в ионную сторону, экранируется током нагреваемых ионов уже при умеренной плотности плазмы. Тем не менее проведенный в [3] расчет доказал принципиальную возможность создания сепаратора изотопов $^{157}\text{Gd}^{64}$ с высокой производительностью, несмотря на значительное снижение эффективности нагрева на первой гармонике (в 20 раз при плотности плазмы $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$).

Нагрев на второй гармонике циклотронной частоты в длинноволновом пределе также мал (в разреженной плазме он мал по параметру ρ^2/l^2 , где ρ – ларморовский радиус ионов), однако ослабление экранировки позволяет продвинуться в сторону повышения плотности плазмы. Этим определяется актуальность детального анализа схемы сепаратора тяжелых изотопов с ИЦР-нагревом на второй гармонике.

Как мы увидим, селективный ИЦР-нагрев на второй гармонике обладает некоторыми принципиальными отличиями от нагрева на первой гармонике. В частности, изменяется само условие селективности (1), которое начинает зависеть от амплитуды ВЧ-поля, так что существует ограничение на ее величину как снизу, так и сверху.

Ниже будем придерживаться следующего плана изложения. В разд. 2 обсудим приближения, используемые нами для вычисления тензора диэлектрической проницаемости плазмы, а в разд. 3 вычислим ВЧ-поле, создаваемое соленоидальной антенной. В разд. 4 найдена функция распределения ионов на выходе из зоны нагрева. В разд. 5 проведено сравнение методов разделения изотопов при помощи ИЦР-нагрева на первой и второй гармониках циклотронной частоты.

2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ

При расчете ВЧ-поля вблизи удвоенной циклотронной частоты $\omega \approx 2\Omega_i$ можно воспользоваться приближением “почти” холодной плазмы,

записав тензор диэлектрической проницаемости следующим образом:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где индексы α, β пробегает значения r, ϕ, z в цилиндрической системе координат с осью z , направленной вдоль магнитного поля. Компоненты тензора приближенно вычисляются по формулам

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{3\Omega_i^2}, \quad (3a)$$

$$g = -\frac{2\omega_{pi}^2}{3\Omega_i^2}, \quad (3b)$$

$$\eta = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_e^2} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_{\parallel} v_e} W\left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_e}\right) \right), \quad (3b)$$

причем $\omega_{ps} = \sqrt{4\pi n_s Z_s^2 e^2 / m_s}$ и $\Omega_s = eZ_s H / m_s c$ – плазменная и циклотронная частоты частиц сорта s соответственно, $v_s = \sqrt{2T_s / m_s}$ – их тепловая скорость, а

$$W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right).$$

Тепловые эффекты здесь учтены только при вычислении η . То, что ими можно пренебречь при вычислении других компонент тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$, заранее не очевидно, так как тепловые добавки обычно существенны именно при выполнении резонансных условий. Однако можно показать, что отброшенные в (2) слагаемые малы, по крайней мере, по параметру $k_{\perp}^2 \rho^2 / k_{\parallel} \rho$, где k_{\perp} и k_{\parallel} – характерные значения поперечного и продольного волновых чисел в спектре ВЧ-поля. Точная формула типа (3b) для величины η , предполагающая максвелловское распределение электронов в струе плазмы, нам не потребуется. Действительно, так как отношение ω_{pe}^2 / v_e^2 не зависит от массы, для η справедлива оценка $\eta \sim \omega_{pi}^2 / k_{\parallel}^2 v_i^2$. Следовательно, при выполнении условия селективности нагрева (1) величина $\epsilon/\eta \sim k_{\parallel}^2 v_i^2 / \Omega_i^2$ превышает $1/A^2$ (при том, что $\epsilon \sim g$). Например, при $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $H = 1.0 \text{ Тл}$, $A = 150$, $l = 2 \text{ м}$, $T = 5 \text{ эВ}$ имеем $\epsilon \sim g \sim 10^4$, $\eta \sim 10^8$. В результате оказывается, что продольное электрическое поле E_z в плазме мало по сравнению с поперечным, и им можно пренебречь, а результат вычисления E_r и E_{ϕ} не зависит от η .

3. ВЧ-ПОЛЕ

Будем считать, что ведущее магнитное поле \mathbf{H} в зоне нагрева с необходимой точностью $\Delta H/H < 1/A$ однородно и направлено вдоль оси симметрии z цилиндрической плазменной струи. Решение волнового уравнения для ВЧ-поля удобно записать в цилиндрической системе координат (r, φ, z) в виде суперпозиции колебаний $\mathbf{E}_k(\mathbf{r}, t)$ с заданной частотой ω и волновыми числами k_{\parallel} и m :

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k(r) e^{i(k_{\parallel}z + m\varphi - \omega t)}. \quad (4)$$

Наличие в спектре колебаний с теми или иными значениями волновых чисел k_{\parallel} и m определяется геометрией антенны. Для генерации колебаний с $m = 0$ используют антенну в виде обычного длинного соленоида¹. Чтобы исключить z -компоненту электрического поля, возникающую вследствие конечного напряжения на соленоиде, с внутренней стороны антенны следует разместить экран из проводящих полос, идущих вдоль оси антенны. Этот экран также компенсирует модуляцию поля антенны вдоль оси z вследствие конечного шага намотки антенного соленоида. В плазме z -компонента электрического поля оказывается малой из-за большой электронной проводимости плазмы вдоль направления магнитного поля.

В первом приближении соленоидальную антенну можно представить в виде отрезка цилиндра с заданным радиусом b ; по поверхности цилиндра течет азимутальный ток

$$\mathbf{j} = I(z)\delta(r-b)e^{-i\omega t}\mathbf{e}_{\varphi}. \quad (5)$$

Для удобства используем комплексную запись, опуская в дальнейшем множитель $\exp(-i\omega t)$; физический смысл, как всегда, имеет вещественная часть исходных и итоговых выражений. Распределение поверхностного тока $I(z)$ вдоль соленоида определяется плотностью намотки. Амплитуда гармоники тока I_k с заданным k_{\parallel} связана с $I(z)$ интегралом Фурье:

$$I_k = \int dz I(z) e^{-ik_{\parallel}z}. \quad (6)$$

При равномерной намотке

$$I_k = I_0 N \text{sinc}(k_{\parallel}l/2), \quad (7)$$

¹ Витковая антенна, использованная в первых экспериментах по ИЦР-разделению изотопов [5], не является полным эквивалентом соленоидальной антенны. Имея продольный разрез, она не обеспечивает идеальной аксиальной симметрии ВЧ-поля. При большой величине диэлектрической проницаемости плазмы ВЧ-поле выталкивается из плазмы в этот разрез.

где I_0 – ток в витке, N – число витков, l – длина антенны, а $\text{sinc}(x)$ обозначает $\sin(x)/x$.

Полагая $E_z = 0$ и тем самым исключая из анализа электронные колебания (см. [6]), для фурье-амплитуды $E_{\varphi k}(r)$ азимутальной составляющей электрического поля получаем уравнение второго порядка (см., например, [7])

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_{\varphi k}(r) - \kappa_v^2 E_{\varphi k}(r) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} I_k \delta(r-b), \quad (8)$$

где

$$\kappa_v^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{(N_{\parallel}^2 - \epsilon)^2 - g^2}{N_{\parallel}^2 - \epsilon} \right], \quad (9)$$

а $N_{\parallel} = k_{\parallel}c/\omega$. Заметим, что знаменатель в правой части (9) не обращается в нуль, так как $\epsilon < 0$. На оси плазмы амплитуда поля $E_{\varphi k}(0)$ ограничена, а на поверхности хорошо проводящей камеры радиуса $R > b$ равна нулю, $E_{\varphi k}(R) = 0$. Радиальная компонента электрического поля выражается через $E_{\varphi k}$:

$$E_{rk} = \frac{ig}{N_{\parallel}^2 - \epsilon} E_{\varphi k}. \quad (10)$$

Если плотность плазмы не очень велика, приближенное решение уравнения (8) можно получить, положив формально $\epsilon = 1, g = 0$. Обозначив через $\kappa^2 = k_{\parallel}^2 - \omega^2/c^2$ величину κ_v^2 в вакууме, имеем

$$E_{\varphi k} = \frac{4\pi i \omega I_k b}{c^2} \times \begin{cases} [K_1(\kappa b) - I_1(\kappa b)K_1(\kappa R)/I_1(\kappa R)]I_1(\kappa r), & r \leq b, \\ I_1(\kappa b)K_1(\kappa r) - [I_1(\kappa b)K_1(\kappa R)/I_1(\kappa R)]I_1(\kappa r), & r \geq b. \end{cases} \quad (11)$$

Обоснование указанного приближения содержится в работах [7] и [3], где показано, что влиянием плазмы на величину азимутального электрического поля, создаваемого соленоидальной антенной, можно пренебречь вплоть до очень больших плотностей при выполнении условия

$$|\kappa_v^2 - \kappa^2| a^2 \ll 1, \quad (12)$$

где a – радиус плазменной струи (при этом величина ϵ и g может быть очень большой).

Для низкочастотных вынужденных колебаний, $\omega \ll 2\pi c/l$, параметр κ в (11) можно заменить

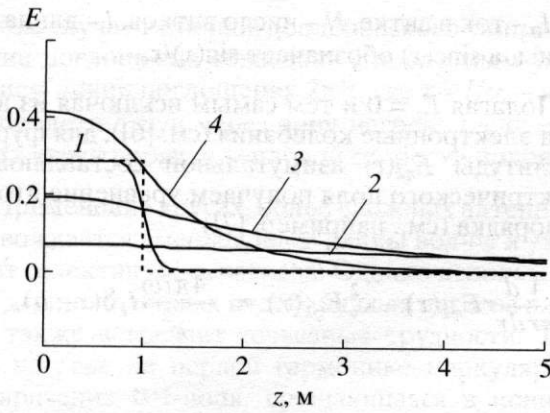


Рис. 2. Профиль ВЧ-поля вдоль силовой линии ведущего магнитного поля для соленоидальной антенны, работающей на удвоенной циклотронной частоте: 1 - E_ϕ (не зависит от плотности плазмы, если выполнено условие (12)); 2 - E_r , при $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$; 3 - E_r , при $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$; 4 - E_r , при $n = 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Координата z отсчитывается от середины соленоидальной антенны; расстояние от оси плазменной струи и антенны $r = 5 \text{ см}$, индукция магнитного поля $H = 10 \text{ кГс}$ (графики не зависят от H), длина антенны $l = 2 \text{ м}$, радиус антенны $b = 17.5 \text{ см}$, радиус вакуумной камеры $R = 25 \text{ см}$. E_ϕ и E_r нормированы на значение $E_\phi = 2\pi\omega_0 N b [1 - b^2/R^2]/c^2 l$ на поверхности антенного соленоида. Пунктиром показан профиль E_ϕ , получающийся после отбрасывания в (13) всех членов, содержащих коэффициенты P_n . ВЧ-поле направлено по азимуту в моменты времени, когда ωt кратно π (кривая 1); направление поля изменяется на строго радиальное через четверть периода (кривые 2-4).

на k_\parallel ; тогда пространственную структуру ВЧ-поля удастся восстановить аналитически:

$$E_\phi = \frac{2\pi i \omega N I_0}{c^2 l} \times \begin{cases} 2\pi b \sum_{n=1}^{\infty} P_n \exp\left(-\frac{q_n l}{2R}\right) \text{ch}\left(\frac{q_n}{R} z\right) + \left[1 - \frac{b^2}{R^2}\right] r, & |z| \leq l/2, \\ -2\pi b \sum_{n=1}^{\infty} P_n \exp\left(-\frac{q_n}{R} |z|\right) \text{sh}\left(\frac{q_n l}{2R}\right), & |z| > l/2, \end{cases} \quad (13)$$

где q_n - корни уравнения $J_1(q) = 0$ (кроме $q_0 = 0$),

$$P_n = \frac{J_1(q_n b/R) N_1(q_n) J_1(q_n r/R)}{q_n J_0(q_n)},$$

J_1 и N_1 - функции Бесселя. Поправки к показателю экспонент q_n/R в (13), обусловленные наличием плазмы, по порядку величины равны $(\omega_{pi}^2/c^2)R/q_n$. Они малы по сравнению с q_n/R при выполнении условия (12).

Восстановление профиля E_r дает следующий результат:

$$E_r = \frac{2\pi\omega N I_0 g}{c^2 l} \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{b^2}{R^2}\right] r \times \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{\omega\sqrt{-\epsilon}}{2c} l\right) \text{ch}\left(\frac{\omega\sqrt{-\epsilon}}{c} z\right), & |z| \leq l/2, \\ \exp\left(-\frac{\omega\sqrt{-\epsilon}}{c} |z|\right) \text{sh}\left(\frac{\omega\sqrt{-\epsilon}}{2c} l\right), & |z| > l/2. \end{cases} \quad (14)$$

Основной вклад здесь вносит полюс в плоскости комплексной переменной интегрирования k_\parallel обратного преобразования Фурье в точке $N_\parallel^2 = \epsilon$, а вклад нулей функции $I_1(kR)$ из знаменателя в (11) пренебрежимо мал, что еще раз оправдывает использование "вакуумного" приближения при вычислении E_ϕ .

Из анализа (13) и (14) следует, что E_ϕ убывает на расстоянии порядка R от края антенны, тогда как E_r проникает на скин-длину c/ω_{pi} вдоль оси плазменного шнура. Даже для очень плотной гадолиниевой плазмы скин-длина значительно больше, чем радиус кожуха R (рис. 2).

Возникновение радиального поля E_r связано с бунчировкой ларморовского вращения ионов в неоднородном (по радиусу) поле антенны. При нагреве на второй гармонике ионы, первоначально двигавшиеся вдоль одной силовой линии, разбиваются на две трубки, вращающиеся по ларморовской орбите вокруг общего ларморовского центра. Из-за неоднородности поля антенны радиус орбиты на крайних силовых линиях больше, чем на внутренних. В результате каждую половину циклотронного периода ионная компонента плазмы раздувается (в радиальном направлении). Колебания плотности ионов нейтрализуются за счет перетекания электронов вдоль силовых линий магнитного поля. Система в целом функционирует как плазменный волновод, возбуждаемый антенной на существенно докритической частоте. Глубина проникновения колебаний в волновод при этих условиях оценивается из равенства $N_\parallel^2 = \epsilon$ и примерно равна c/ω_{pi} . Соотношение $l \sim c/\omega_{pi}$ определяет своего рода критическое значение плотности плазмы n_2 . При $l \ll c/\omega_{pi}$ (докритическая плотность) радиальное электрическое поле E_r простирается в дальнюю зону антенны, но оно значительно меньше, чем E_ϕ в ближней зоне антенны (рис. 2, кривые 2, 3). При $l \geq c/\omega_{pi}$ (надкритическая плотность) поле антенны локализовано в ближней зоне, а E_r сопоставимо с E_ϕ (рис. 2, кривая 4). Для антенны с длиной $l = 2 \text{ м}$ критическая плотность $n_2 \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Напомним, что при нагреве на первой гармонике циклотронной частоты соотношение $|\epsilon| \sim N_{\parallel}^2$ (в котором для k_{\parallel} используется значение $k_{*} = 2\pi/l$) также определяет критическую плотность, т.е. плотность n_1 , выше которой в плазме экранируется левополяризованная компонента поля антенны, вращающаяся в ионную сторону [3]. Для параметров сепаратора изотопов, рассматриваемых в настоящей работе, n_1 на один-два порядка меньше, чем n_2 . Структура поля антенны при нагреве на первой гармонике циклотронной частоты существенно отличается от представленной на рис. 2. В частности, величина E_r ни в какой момент времени не обращается в нуль сразу во всех точках плазменной струи в отличие от случая нагрева на второй гармонике, когда через каждую четверть периода ВЧ-поля компоненты E_{ϕ} и E_r поочередно обращаются в нуль во всем пространстве. Подробнее структура ВЧ-поля при нагреве на первой гармонике обсуждается в [8]. Там же приведены графики E_r и E_{ϕ} , из которых следует, что амплитуда левополяризованной компоненты E^+ резко уменьшается при превышении плотностью плазмы критического значения n_1 , а E^+ изменяет знак вне антенны. Такая переполюсовка E^+ приводит к уменьшению нагрева резонансных ионов. В следующем разделе мы покажем, что аналогичные изменения при превышении критического значения плотности n_2 испытывает частота $\tilde{\Omega}$, характеризующая резонансное взаимодействие на второй гармонике циклотронной частоты.

4. НАГРЕВ

Движение заряженной частицы в ВЧ-поле исследовалось во многих работах (см., например, [9–12]). Запишем соответствующий гамильтониан в форме, представленной в [3], оставив в нем только слагаемое, отвечающее за взаимодействие иона с левополяризованными колебаниями при $\omega = 2\Omega$ и, кроме того, пренебрежем несущественными для дальнейшего нелинейными эффектами, связанными с релятивистским сдвигом циклотронной частоты:

$$\mathcal{H} = \Omega J + \frac{e}{2\omega m} J \left[\frac{\partial E^+}{\partial r^-} e^{i2\alpha - i\omega t} + \text{к. с.} \right]. \quad (15)$$

Здесь $J = m v_{\perp}^2 / 2\Omega$ – величина, пропорциональная магнитному моменту частицы $\mu = m v_{\perp}^2 / 2H$, α – канонически сопряженная ему фаза, $E^+ = (E_r + iE_{\phi})e^{i\phi} / \sqrt{2}$ – амплитуда левополяризованной компоненты электрического поля, а $r^- = (x - iy) / \sqrt{2}$ – “правая” спиральная координата; для краткости опускаем индексы, указывающие на сорт частицы.

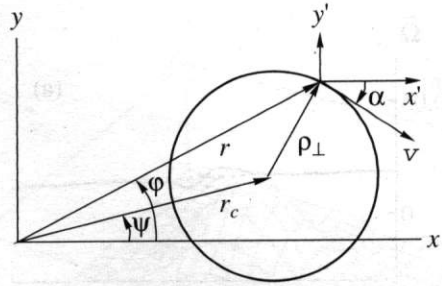


Рис. 3. Система координат: r и ϕ характеризуют текущее положение частицы, а r_c и ψ – положение ее ведущего центра; α – фаза ларморовского вращения.

Скорость движения частицы вдоль силовой линии v_{\parallel} можно считать постоянной, поэтому в (15) опущен член, соответствующий кинетической энергии продольного движения (подробнее см. [3]).

Величина E^+ в (15) должна быть приведена к координатам ведущего центра ларморовской траектории r_c и ψ (рис. 3):

$$\frac{\partial E^+}{\partial r^-} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} r \frac{\partial E^+}{\partial r} \Big|_{r=r_c, \phi=\psi}$$

Используя (13) и (14), нетрудно переписать (15) в простой форме:

$$\mathcal{H} = \Omega J + \tilde{\Omega} J \cos(2\alpha - \omega t + 2\psi), \quad (16)$$

где

$$\tilde{\Omega} = \frac{\pi I_0 N e}{m c^2 l} \left\{ \frac{2\pi b}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(q_n b/R) N_1(q_n) J_2(q_n r_c/R)}{J_0(q_n)} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{q_n l}{2R}\right) \text{ch}\left(\frac{q_n}{R} z\right) + \left[1 - \frac{b^2}{R^2}\right] \frac{\omega l r_c g \epsilon'}{4c(-\epsilon)^{3/2}} \times \right. \quad (17a)$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{2c} l\right) \left(\text{ch}\left(\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{c} z\right) - \frac{2z}{l} \text{sh}\left(\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{c} z\right) \right) \right\}$$

при $|z| < l/2$ и

$$\tilde{\Omega} = \frac{\pi I_0 N e}{m c^2 l} \left\{ \frac{2\pi b}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(q_n b/R) N_1(q_n) J_2(q_n r_c/R)}{J_0(q_n)} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{q_n}{R} |z|\right) \text{sh}\left(\frac{q_n}{2R} l\right) + \left[1 - \frac{b^2}{R^2}\right] \frac{\omega l r_c g \epsilon'}{4c(-\epsilon)^{3/2}} \times \right. \quad (17b)$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{c} |z|\right) \left(\text{ch}\left(\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{2c} l\right) - \frac{2|z|}{l} \text{sh}\left(\frac{\omega \sqrt{-\epsilon}}{2c} l\right) \right) \right\}$$

при $|z| > l/2$; штрих обозначает производную по радиусу. При $\omega = 2\Omega$ для плазмы, состоящей из ионов разных изотопов одного тяжелого элемента, с большой точностью $\omega \sqrt{-\epsilon} / c = 2\omega_{pi} / \sqrt{3} c$.

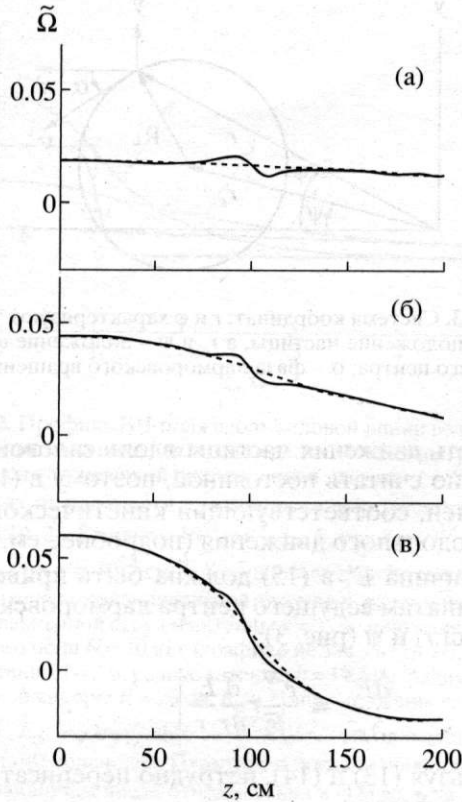


Рис. 4. Графики зависимости $\tilde{\Omega}(z)$ для разных значений плотности плазмы: $n(r) = n_0(1 - r^2/a^2)$ при $r \leq a$ и $n(r) = 0$ при $r \geq a$ ($a = 10$ см). а - $n_0 = 4/3 \times 10^{11}$ см $^{-3}$; б - $n_0 = 4/3 \times 10^{12}$ см $^{-3}$; в - $n_0 = 4/3 \times 10^{13}$ см $^{-3}$; другие параметры такие же, как на рис. 2. Пунктирная линия соответствует вкладу второго слагаемого в (17). Величина $\tilde{\Omega}$ нормирована на $e\tilde{H}_z/mc$.

Параметр $\tilde{\Omega}$ имеет размерность частоты и характеризует интенсивность нагрева на второй гармонике циклотронной частоты (см. ниже). Первое слагаемое в (17а) и (17б), само содержащее суммирование по корням уравнения $J_1(q) = 0$, соответствует вкладу E_φ . Второе слагаемое связано с наличием E_r и неоднородностью плазмы по радиусу. Первое слагаемое существенно только при $\omega_{pi}l/c \leq 1$ и только вблизи краев соленоидальной антенны, где зависимость E_φ от r заметно отклоняется от линейной. Непосредственно под антенной (при $z = 0$) частота $\tilde{\Omega}$ максимальна (рис. 4) и равна

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{1}{8} \frac{e\tilde{H}_z r_c g' \omega \sqrt{|\epsilon|} l}{mc \epsilon} \exp\left(-\frac{\omega \sqrt{|\epsilon|} l}{2c}\right), \quad (18)$$

где $\tilde{H}_z = 4\pi I_0 N [1 - b^2/R^2]/cl$ – магнитное поле антенны. Величина максимума зависит от плотнос-

ти и сама максимальна при $\omega_{pi}l/c = \sqrt{3}$, поэтому для нагрева оптимальной является плотность порядка критической плотности n_2 . Формально из (17) следует, что за исключением области вблизи торцов антенны $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$ как при $n \rightarrow 0$, так и при $n \rightarrow \infty$. Однако за рамками использованного “квазистатического приближения” (12) величина $\tilde{\Omega}$ в вакуумном пределе $n \rightarrow 0$ оказывается конечной, хотя и малой по параметру $\omega^2 a^2/c^2$. Отметим также, что уменьшение нагрева на второй гармонике при снижении плотности ниже критического значения n_2 есть следствие аксиальной симметрии задачи. Как показано в Приложении, в плоской геометрии нагрев не уменьшается в вакуумном пределе, и это отличие от цилиндрической геометрии сохраняется, даже если считать, что ларморовский радиус частиц бесконечно мал.

В новых обозначениях $\phi = 2\alpha - \omega t + 2\psi$, $\Delta\omega = \omega - 2\tilde{\Omega}$ уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= 2\tilde{\Omega} J \sin\phi, \\ \dot{\phi} &= 2\tilde{\Omega} \cos\phi - \Delta\omega. \end{aligned} \quad (19)$$

Для резонансных частиц с $\Delta\omega = 0$ легко найти общее решение этих уравнений. Если через J_0, ϕ_0 и z_0 обозначить начальные параметры частицы, то

$$\begin{aligned} J &= J_0 \left[\text{ch} \left(2 \int_0^t \tilde{\Omega} dt \right) + \sin\phi_0 \text{sh} \left(2 \int_0^t \tilde{\Omega} dt \right) \right], \\ \phi &= 2 \arctg \left[\text{th} \left(\int_0^t \tilde{\Omega} dt + \text{Arth} \left(\text{tg} \frac{\phi_0}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{\Omega}$ рассматривается как функция от z , а $z = z_0 + v_{||}t$.

Если $\Delta\omega \neq 0$, решение удастся найти для случая $\tilde{\Omega} = \text{const}$. Используя обозначения $\delta\omega = \Delta\omega/2\tilde{\Omega}$ и $\tau = 2\tilde{\Omega}t$, имеем

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \\ &= J_0 \frac{\delta\omega + \text{ch} \left[\sqrt{1 - \delta\omega^2} \tau + 2 \text{Arth} \left(\sqrt{\frac{1 + \delta\omega}{1 - \delta\omega}} \text{tg} \frac{\phi_0}{2} \right) \right]}{\delta\omega + \text{ch} \left[2 \text{Arth} \left(\sqrt{\frac{1 + \delta\omega}{1 - \delta\omega}} \text{tg} \frac{\phi_0}{2} \right) \right]}, \quad (21a) \\ \phi(\tau) &= 2 \arctg \left[\sqrt{\frac{1 - \delta\omega}{1 + \delta\omega}} \text{th} \left(\sqrt{1 - \delta\omega^2} \frac{\tau}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{Arth} \left(\sqrt{\frac{1 + \delta\omega}{1 - \delta\omega}} \text{tg} \frac{\phi_0}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Если $|\delta\omega| > 1$, то (21a) удобнее переписать в виде

$$J = J_0 \frac{\delta\omega - \cos\phi_0}{\delta\omega^2 - 1} \times$$

$$\times \left[\delta\omega + \cos\left(\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau + \arccos\left(\frac{\delta\omega \cos\phi_0 - 1}{\delta\omega - \cos\phi_0}\right)\right) \right],$$

$$\phi = 2 \arctg \left[\sqrt{\frac{\delta\omega - 1}{\delta\omega + 1}} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{\delta\omega^2 - 1} \frac{\tau}{2} + \right. \right. \tag{21б}$$

$$\left. \left. + \arctg \left(\sqrt{\frac{\delta\omega + 1}{\delta\omega - 1}} \operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} \right) \right) \right].$$

Как следует из (21б), энергия частицы всегда остается на одном уровне с начальной, если $|\delta\omega| > 1$. Если же $|\delta\omega| < 1$, то поперечная энергия частицы ΩJ экспоненциально растет со временем. Следовательно, для обеспечения селективности нагрева необходимо, чтобы выполнялось условие $2\tilde{\Omega} < \Delta\Omega = \Omega/A$.

Чтобы набранная резонансной частицей энергия заметно превышала тепловую, время пролета через зону нагрева должно быть достаточно большим, а именно: должно выполняться условие $2\tilde{\Omega}L/v_{\parallel} > 1$, где L – длина зоны нагрева. Кроме того, темп нагрева резонансных ионов, определяемый частотой $\tilde{\Omega}$, должен быть выше темпа обмена энергией между изотопами, который определяется частотой ион-ионных столкновений ν_{ii} . Таким образом, условие селективности для нагрева на второй гармонике принимает следующий вид:

$$\max[v_{\parallel}/L, \nu_{ii}] < 2\tilde{\Omega} < \Delta\Omega. \tag{22}$$

Поскольку переменные J и ϕ являются каноническими, функция распределения ионов $f(J, \phi, t)$ постоянна вдоль фазовой траектории, т.е.

$$f(J, \phi, t) = f_0(J_0, \phi_0),$$

где $f_0(J_0, \phi_0)$ – начальная функция распределения, а начальные значения переменных J_0 и ϕ_0 должны быть выражены через канонический момент частицы J и фазовый угол ϕ в данный момент времени $t = z/v_{\parallel}$; для краткости опускаем зависимость f от v_{\parallel} .

Далее предположим, что начальная функция распределения по поперечным скоростям является максвелловской, т.е.

$$f_0 = \frac{\Omega}{2\pi T_{\perp}} \exp\left[-\frac{\Omega J}{T_{\perp}}\right]. \tag{23}$$

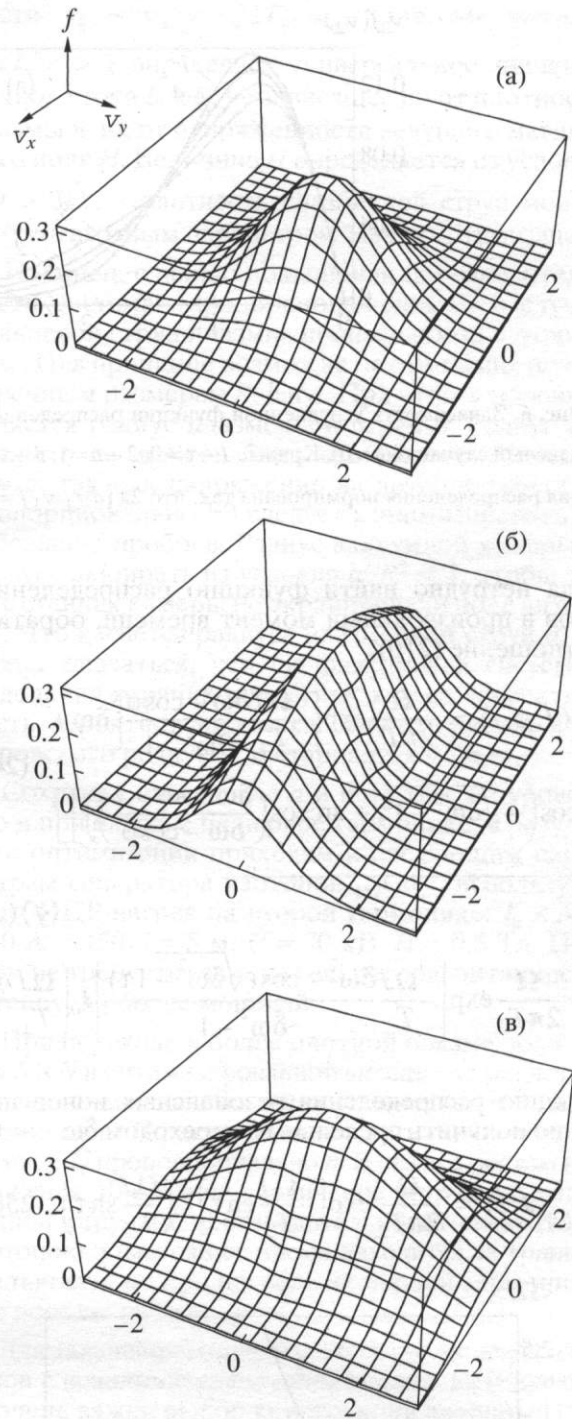


Рис. 5. Функция распределения ионов по поперечным скоростям в различные моменты времени: а – начальная функция распределения; б – функция распределения резонансных ионов ($\delta\omega = 0$) в момент времени $\tau = 2$; в – функция распределения нерезонансных ионов ($\delta\omega = 2$) в момент времени $\tau = 2$. Распределение вращается с циклотронной частотой Ω вокруг вертикальной оси. Скорость ионов нормирована на $\sqrt{2T_{\perp}/m}$. Функция распределения нормирована так, что $\iint dv_x dv_y f = 1$.

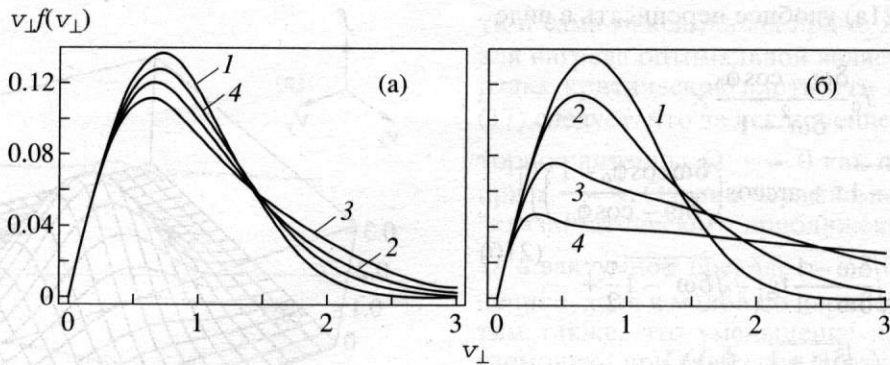


Рис. 6. Зависимость усредненной функции распределения ионов от v_{\perp} : а – нерезонансный случай ($\delta\omega = 2$); б – резонансный случай ($\delta\omega = 0$). Кривые 1 – $\tau = 0$; 2 – $\tau = 1$; 3 – $\tau = 2$; 4 – $\tau = 3$. Скорость ионов нормирована на $\sqrt{2T_{\perp}/m}$. Функция распределения нормирована так, что $2\pi \int dv_{\perp} v_{\perp} f = 1$.

Тогда нетрудно найти функцию распределения ионов в произвольный момент времени, обратив соотношение (21б):

$$f(J, \phi, t) = \frac{\Omega}{2\pi T_{\perp}} \exp\left[-\frac{\Omega J \delta\omega - \cos\phi}{T_{\perp} \delta\omega^2 - 1} \left[\delta\omega + \cos\left(-\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau + \arccos\left(\frac{\delta\omega \cos\phi - 1}{\delta\omega - \cos\phi}\right)\right)\right]\right] \quad (24)$$

Вычисленное распределение резонансных и нерезонансных ионов по скоростям представлено на рис. 5. В лабораторной системе координат в произвольной фиксированной точке плазменной струи функция распределения ионов периодична с периодом π/Ω . Усредняя (24) по ϕ , находим среднее по времени распределение нагретых ионов по поперечной энергии. В нерезонансном случае имеем

$$\langle f \rangle(J, t) = \frac{\Omega}{2\pi T_{\perp}} \exp\left[\frac{\Omega J \delta\omega^2 - \cos(\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau)}{T_{\perp} \delta\omega^2 - 1}\right] I_0\left(\frac{\Omega J \sqrt{2\delta\omega^2 - 2\delta\omega^2 \cos(\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau) - \sin^2(\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau)}}{\delta\omega^2 - 1}\right) \quad (25a)$$

Функцию распределения резонансных ионов нетрудно получить предельным переходом $\delta\omega \rightarrow 0$:

$$\langle f \rangle_{\text{res}}(J, t) = \frac{\Omega}{2\pi T_{\perp}} \exp\left[-\frac{\Omega J}{T_{\perp}} \text{ch}\tau\right] I_0\left(\frac{\Omega J}{T_{\perp}} \text{sh}\tau\right) \quad (25б)$$

На рис. 6 приведены зависимости (25) в разные моменты времени. Темп нагрева характеризует зависимость от времени средней поперечной энергии ΩJ :

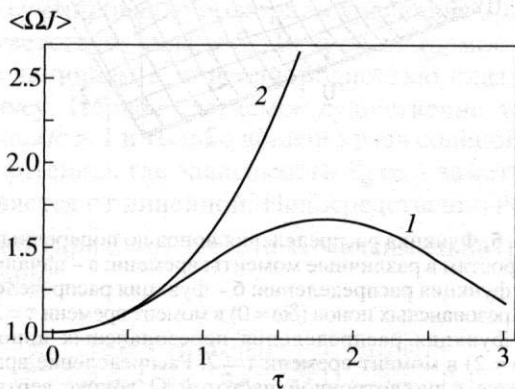


Рис. 7. Зависимость средней поперечной энергии от времени для резонансного (2) и нерезонансного случая (1) при $\delta\omega = 1$. Энергия нормирована на начальную поперечную температуру ионов.

$$\langle \Omega J \rangle = T_{\perp} \frac{\delta\omega^2 - \cos(\sqrt{\delta\omega^2 - 1}\tau)}{\delta\omega^2 - 1}, \quad (26)$$

$$\langle \Omega J \rangle_{\text{res}} = T_{\perp} \text{ch}\tau.$$

Ее иллюстрирует рис. 7. Интересно, что частота $\tilde{\Omega}$ не зависит от напряженности магнитного поля. Как следствие, энергия иона на выходе из зоны нагрева также не зависит от H . Напротив, при нагреве на первой гармонике увеличение H ведет к росту энергии, набранной резонансными ионами [3]. Однако в любом случае достаточно сильное магнитное поле необходимо для выполнения условия селективности нагрева (22).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим перспективы практической реализации рассмотренной схемы разделения тяжелых изотопов за счет селективного нагрева на второй гармонике циклотронной частоты.

В качестве точки отсчета возьмем параметры сепаратора изотопов $^{157}\text{Gd}^{64}$, приведенные в [3]: полный ток антенны $I_0 \times N = 60 \text{ А} \times 150$, длина $l = 2 \text{ м}$, плотность плазмы $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, ее продольная температура $T_{\parallel} = 5 \text{ эВ}$, начальная поперечная температура $T_{\perp} = 60 \text{ эВ}$, радиус вакуумной камеры $R = 25 \text{ см}$, радиус антенны $b = 17.5 \text{ см}$, радиус плазменной струи $a = 10 \text{ см}$, напряжение на антенне $U = 70 \text{ кВ}$, магнитное поле $H = 1.5 - 3 \text{ Тл}$. При этих параметрах использование второй гармоники не обеспечивает необходимый темп нагрева $\tilde{\Omega}$, который оказывается даже меньше, чем частота кулоновских столкновений ν_{ii} : тогда как при нагреве на первой гармонике на выходе из зоны нагрева резонансные ионы $^{157}\text{Gd}^{64}$ набирают энергию порядка $W_{\perp} \approx 300 \text{ эВ}$ (на периферии плазменной струи). Однако параметры системы, оптимизированные для нагрева на первой гармонике, не являются наилучшими при нагреве на второй гармонике.

Приступая к оптимизации сепаратора изотопов, прежде всего необходимо заметить, что длина зоны нагрева L на второй гармонике определяется скин-длиной c/ω_{pi} . Ясно, что зона нагрева должна быть максимально длинной. Однако, если $L > c/\omega_{pi}$, ухудшается селективность нагрева из-за инвертирования знака частоты $\tilde{\Omega}$, определяющей темп нагрева резонансных ионов. Поэтому заключаем, что $L \sim c/\omega_{pi}$. В реальной установке по разделению изотопов ограничение зоны нагрева может осуществляться за счет вывода частиц из резонанса при изменении напряженности ведущего магнитного поля вне зоны нагрева.

Далее следует заметить, что длина антенны l также должна быть меньше, чем c/ω_{pi} , иначе темп нагрева $\tilde{\Omega}$ экспоненциально уменьшается. С другой стороны, с уменьшением l при заданном полном токе $I_0 \times N$ напряжение на антенне растет пропорционально l^{-1} . Таким образом, $l \sim L \sim c/\omega_{pi}$.

Ток в антенне определяется из условия $2\tilde{\Omega}L/v_{\parallel} > 1$, гарантирующего, что резонансные ионы за время пролета через зону нагрева приобретают энергию, существенно превышающую их начальную поперечную температуру T_{\perp}^2 .

При $L \sim l \leq c/\omega_{pi}$ величина $2\tilde{\Omega}L/v_{\parallel}$ зависит только от полного тока антенны $I_0 \times N$ и продольной ско-

рости $v_{\parallel} \sim v_a = \sqrt{2T_{\parallel}/m_a}$. Поэтому условие $2\tilde{\Omega}L/v_{\parallel} > 1$ определяет универсальное значение полного тока $I_0 \times N$, не зависящее ни от плотности плазмы n , ни от напряженности ведущего магнитного поля H . Величина H определяется из условия $\Delta\Omega > 2\tilde{\Omega}$, а плотность плазменной струи можно считать входным параметром задачи оптимизации.

Наконец, с целью повышения производительности системы (пропорциональной na в случае кольцевой струи плазмы, производимой источником [1]) в принципе возможна оптимизация по поперечным размерам R , b и a . При этом ключевым является радиус плазменной струи b . Радиус антенны b не должен быть существенно больше, чем a , так как напряжение на антенне (которое пропорционально b^2) следует минимизировать во избежание пробоев. Радиус вакуумной камеры R следует выбирать из условия $b^2/R^2 \ll 1$, чтобы точки в стенках камеры не экранировали поле антенны. Что касается радиуса плазменной струи a , то может оказаться, что он фиксирован системой выделения горячих ионов, так как ее эффективность, вероятно, снижается, если отношение ларморовского радиуса k к a становится малым.

Сохранив параметры a и n на том же уровне, что и при нагреве на первой гармонике, в результате оптимизации приходим к следующим параметрам сепаратора изотопов $^{157}\text{Gd}^{64}$, использующего ИЦР-нагрев на второй гармонике: $I_0 \times N = 60 \text{ А} \times 450$, $l = 5 \text{ м}$, $U = 70 \text{ кВ}$, $H = 0.5 \text{ Тл}$. При этом не требуется замена генератора, питающего антенну, на более мощный.

При переходе к более плотной плазме полный ток $I_0 \times N$ в оптимизированной антенне не меняется, ее длина l уменьшается пропорционально $n^{-1/2}$, магнитное поле H растет, как $n^{+1/2}$, а напряжение на антенне U пропорционально n . В связи с ростом напряжения 10-кратное увеличение плотности плазменной струи (и производительности сепаратора изотопов) в настоящее время находится за гранью реальности, но при нагреве на первой гармонике оно вообще невозможно.

Для дальнейшего анализа схемы разделения изотопов с использованием селективного ИЦР-нагрева очень важен выбор конструкции антенны [13]. Наши расчеты относятся к случаю простейшей соленоидальной антенны, возбуждающей ВЧ-поле с азимутальным числом $m = 0$. Ее простота позволила вычислить ВЧ-поле в плотной плазме в аналитическом виде. Недостатком соленоидальной антенны является неоднородность прогрева плазменной струи из-за равенства нулю ВЧ-поля на оси системы. Однородный прогрев обеспечивают винтовые антенны [14]. Однако при равной длине они имеют более широкий спектр по продольному волновому числу k_{\parallel} и, следовательно, обеспечивают меньшую селективность нагрева по сравнению с со-

² Необходимо также выполнение условия $\tilde{\Omega} > \nu_{ii}$, которое становится существенным в плотной плазме.

леноидальной антенной. Выполненные до сих пор расчеты по селективному ИЦР-нагреву винтовыми антеннами основывались на предположении, что затухание ВЧ-поля в плазме мало, т.е. тензор диэлектрической проницаемости является почти эрмитовым. В этом случае возможно резкое сужение спектра возбуждаемых колебаний по k_{\parallel} при работе на первой гармонике циклотронной частоты [14]. В гадолиниевой плазме с природным составом изотопов тензор диэлектрической проницаемости обладает уникальными свойствами, а именно: вблизи циклотронной частоты его эрмитова часть меньше антиэрмитовой и даже обращается в нуль вблизи циклотронной частоты изотопа $^{157}\text{Gd}^{64}$ [3]. Поэтому имеющиеся предсказания по разделению изотопов кальция [14] не могут быть экстраполированы на случай гадолиниевой плазмы. Кроме того, есть основания предполагать, что винтовые антенны могут быть особенно эффективны при нагреве на второй гармонике, поскольку создают ВЧ-поле, близкое к "плоскому", которое обеспечивает более эффективный нагрев резонансных частиц (см. Приложение).

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта № 274 по направлению "Фундаментальные исследования в области физики и высоких технологий" Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы".

Авторы признательны А.В. Тимофееву за внимательное прочтение рукописи статьи и ценные замечания, а также В.И. Волосову за полезные обсуждения планируемых экспериментов по ИЦР-разделению тяжелых изотопов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Плоский случай

В вакуумном случае для соленоидальной антенны в квазистатическом приближении имеем

$$E_r = 0, \quad E_{\varphi} = \frac{2\pi i \omega N I_0}{c^2 l} \left[1 - \frac{b^2}{R^2} \right] r. \quad (27)$$

При этом нагрев на второй гармонике отсутствует, так как

$$\frac{\partial E^+}{\partial r^-} = \frac{i e^{2i\varphi}}{2} r \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} = 0.$$

В пределе, когда радиус ларморовской орбиты ρ частицы мал по сравнению с расстоянием до оси антенны, $\rho/r \rightarrow 0$, поле (27) можно рассматривать как плоское поле вида

$$E_x = 0, \quad E_y = \mathcal{A}x, \quad (28)$$

где \mathcal{A} не зависит от x . Настоящее плоское поле можно создать, сплющив сечение соленоидальной антенны.

Из-за наличия указанного выше предельного перехода можно было бы ожидать, что в плоском вакуумном поле нагрев на второй гармонике также отсутствует. Однако легко видеть, что

$$\frac{\partial E^+}{\partial r^-} = \frac{\partial(E_x + iE_y)}{\partial(x - iy)} = \frac{i\mathcal{A}}{2} \neq 0.$$

Парадокс разрешается, если обратиться к рис. 3 и расписать произведение $r v_{\varphi}$, пропорциональное работе $e\mathbf{E}\mathbf{v}$ цилиндрического ВЧ-поля над частицей в единицу времени, явно выделив фазу ларморовского вращения α :

$$r v_{\varphi} = -r_c v_{\perp} \sin \alpha - \rho v_{\perp}.$$

Оно не содержит второй гармоники. Прделав то же самое с произведением $x v_y$, пропорциональным работе плоского ВЧ-поля, получим выражение, содержащее вторую гармонику:

$$x v_y = -r_c v_{\perp} \sin \alpha - \rho v_{\perp} \sin^2 \alpha.$$

Разница, не исчезающая в пределе $\rho/r_c \rightarrow 0$, связана с тем, что в цилиндрическом случае направление ВЧ-поля изменяется на небольшой угол $\delta\varphi \sim \rho/r_c$ на диаметре ларморовской орбиты. Этот угол исчезающе мал в пределе $r_c \rightarrow \infty$, но соответствующее изменение δE остается конечным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волосов В.И. Патент РФ № 2071137. Бюл. изобретений, 1996. № 36.
2. Белавин М.И., Звонков А.В., Тимофеев А.В. Патент РФ № 1742900 от 5 июля 1993 г.
3. Волосов В.И., Котельников И.А., Кузьмин С.Г. // Физика плазмы. 1998. Т. 24. С. 517.
4. Волосов В.И., Котельников И.А., Чуркин И.Н. Заявка на патент РФ № 98102500 от 27.01.98.
5. Dawson J.M., Kim H.C., Arnush D. et al. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 1547.
6. Тимофеев А.В., Харитонов К.Ю. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 674.
7. Котельников И.А., Яковченко С.Г. // Там же. 1991. Т. 17. С. 301.
8. Кузьмин С.Г. // Физика плазмы. 1999. Т. 25. С. 1105.
9. Панов Д.А., Тимофеев А.В. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. С. 1092.
10. Нейштадт А.И., Тимофеев А.В. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1706.
11. Kotelnikov I.A., Stupakov G.V. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 881.
12. Cohen B.I., Cohen R.H., Hevins W.M., Rognlien T.D. // Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 949.
13. Тимофеев А.В. // Физика плазмы. 1999. Т. 25. С. 573.
14. A. Compant La Fontaine, Pashkovsky V.G. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4641.